

10 Podgrupe edinke. Kvocientne grupe.

Definicija (edinka)

Naj bo G grupa in $H \leq G$. Podgrupi H pravimo edinka, če je $aH = Ha$ za vsak $a \in G$. To označujemo z $H \triangleleft G$.

1. Naj bo G Abelska grupa. Pokaži, da je vsaka podgrupa H grupe G edinka.
2. (a) Naj bo $H = \{(1), (12)\}$. Ali je H edinka podgrupe S_3 ?
(b) Naj bo $N = \{(1), (123), (132)\}$. Ali je $N \triangleleft S_3$?

Izrek (test za edinke)

Podgrupa H grupe G je edinka v grupi G če in samo če $xHx^{-1} \subseteq H$ za vsak $x \in G$.

3. Dokaži izrek zgoraj.
4. Naj bo $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ in } ac \neq 0 \right\}$. Ali je $H \triangleleft \text{GL}_2(\mathbb{R})$? Obrazloži svojo trditev.
5. Pokaži da je A_n edinka grupe S_n .
6. Naj bosta H in J edinki grupe G . Če je $H \cap J = \{e\}$ (e je identiteta) pokaži, da je potem $xy = yx$ za vse $x \in H, y \in J$.
7. Naj bo $N \triangleleft G$, in naj bo $H \leq G$. Definirajmo

$$NH = \{nh : n \in N, h \in H\}.$$

Pokaži da je $NH \leq G$.

8. Naj bo G grupa in naj bo N podgrupa grupe G . Pokaži da je N edinka grupe G če in samo če za $\forall g \in G$ velja, da je $gNg^{-1} = N$.

Izrek (kvocientne grupe)

Naj bo G grupa in naj bo H edinka grupe G . Množica $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ je grupa, glede na operacijo $(aH)(bH) = abH$, reda $[G : H]$.

9. Dokaži izrek zgoraj.
10. Dokaži, da je kvocientna grupa ciklične grupe ciklična.
11. Pokaži, da je kvocientna grupa abelske grupe abelska.
12. Naj bo $H = \langle 4 \rangle$ podgrupa grupe $G = \mathbb{Z}$ (generirane s številom 4).
 - (a) Napiši vse elemente grupe $H = \langle 4 \rangle$.
 - (b) Pokaži, da je H edinka grupe G .
 - (c) Napiši vse elemente kvocientne grupe $G/H = \mathbb{Z}/\langle 4 \rangle$.
 - (d) Napiši Cayley-evo tabelo za $\mathbb{Z}/\langle 4 \rangle$.
 - (e) Določi red elementa $2 + \langle 4 \rangle$ v grupi $\mathbb{Z}/\langle 4 \rangle$.
13. Določi red elementa $2 + \langle 5 \rangle$ v grupi $\mathbb{Z}/\langle 5 \rangle$.
14. Naj bo $H = \langle 6 \rangle$ podgrupa grupe $G = \mathbb{Z}_{18}$.
 - (a) Napiši vse elemente grupe $H = \langle 6 \rangle$.
 - (b) Pokaži, da je H edinka grupe G .
 - (c) Napiši vse elemente kvocientne grupe $\mathbb{Z}_{18}/\langle 6 \rangle$.
 - (d) Napiši Cayley-evo tabelo za $\mathbb{Z}_{18}/\langle 6 \rangle$.
 - (e) Določi red elementov $2 + \langle 6 \rangle, 3 + \langle 6 \rangle$ in $5 + \langle 6 \rangle$ v grupi $\mathbb{Z}_{18}/\langle 6 \rangle$.

15. Naj bo $K = \langle 15 \rangle$ podgrupa grupe $G = \mathbb{Z}$ (generirane s številom 15).

(a) Napiši vse elemente grupe $K = \langle 15 \rangle$.

(b) Pokaži, da je K edinka grupe G .

(c) Napiši vse elemente kvocientne grupe $G/K = \mathbb{Z}/\langle 15 \rangle$.

(d) Določi red elementov $3 + \langle 15 \rangle$, $4 + \langle 15 \rangle$, $5 + \langle 15 \rangle$ in $6 + \langle 15 \rangle$ v grupi $\mathbb{Z}/\langle 15 \rangle$.

(e) Pokaži, da je $G/K = \mathbb{Z}/\langle 15 \rangle$ ciklična.

(f) Pokaži da je $\mathbb{Z}/\langle 15 \rangle$ izomorfna grupi \mathbb{Z}_{15} .

16. Naj bosta $G = \langle 6 \rangle$ in $H = \langle 24 \rangle$ podgrupi grupe \mathbb{Z} .

(a) Pokaži, da je H edinka v grupi G . Napiši odseke podgrupe H v grupi G . Napiši Cayley-evo tabelo za G/H .

(b) Pokaži, da je $G/H = \langle 6 \rangle/\langle 24 \rangle$ izomorfna grupi \mathbb{Z}_4 .

17. Naj bo $G = U(16)$ grupa vseh pozitivnih celih števil manjših od 16, ki so tuja s 16, glede na operacijo množenja modulo 16.

(a) Kakšen je red grupe G ?

(b) Kakšen je red elementa $15 \in U(16)$?

(c) Naj bo $H = \langle 15 \rangle$ podgrupa grupe $U(16)$ (generirana s številom 15). Določi red kvocientne grupe $U(16)/\langle 15 \rangle$.

(d) Napiši Cayley-evo tabelo za $U(16)/H$.

18. Naj bo $G = H \times K$ (kje sta H in K dani grupi). Pokaži, da je potem $H \times \{e\} \triangleleft G$.

19. Poišči red dane kvocientne grupe

(a) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/(\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle)$;

(b) $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18})/(\langle 4, 3 \rangle)$.

20. Določi red elementa $3\langle 16 \rangle$ v grupi $U(35)/\langle 16 \rangle$.